Annexe du cours de juin 2015

Comme nous avons commencé en janvier et février de cette année, nous profitons de l'occasion offerte par la définition et la vérification des nœuds logiques, pour continuer à réviser notre expérience pratique de la logique classique.

Ceci s'explique du fait que *les nœuds logiques* qui constituent *la logique modifiée* sont divers exemplaires tordus de *la logique canonique classique* (au sens de Tarski et de Quine) telle que celle-ci se présente comme *le nœud trivial*.

Donnons ici sur deux colonnes la correspondance entre le nœud trivial et un nœud quelconque.

1. - Les nœuds logiques expliquent la Logique Classique et la Logique Modifiée

Logique Classique

$Z_2 = (\{0, 1\}, +, \times)$

Le nœud trivial

$(0,1)$

---

un connecteur

$(p\theta q)$

Dualité Morganienne

$(p\theta^* q) \quad = \quad \neg(\neg p\ \theta \neg q)$

---

7 lettres $\quad \neg \quad \wedge \quad \nLeftrightarrow \quad \Leftrightarrow \quad \vee \quad \Leftarrow \quad \Rightarrow$

engendrées par "$\neg$ et $\vee$" ou par "$\wedge$ et $\nLeftrightarrow$"

---

et leur définitions

$(p\wedge q) = \neg(\neg p \vee \neg q)$

$(p\Rightarrow q) = (\neg p \vee q) = \neg(p \wedge \neg p)$

$(p\Leftrightarrow q) = ((p\Rightarrow q) \wedge (p\Leftarrow q))$

$(p\nLeftrightarrow q) = ((p\wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q))$

$$\Psi_{uV}: (0,1) \longrightarrow (u,V)$$

$$\Psi_{uV}(X) = V.X + u.(X + 1) = (u+V)X + u$$

Logique Modifiée

$Z_2^n = (\{0, 1\}^n, +, \times)$

Algèbre de Boole $\leftrightarrow$ Corps de Galois

$AB(2^n) \leftrightarrow \mathbf{GF(2^n)}$

Les nœuds logiques

(u,V)

$(X\theta_{uV}Y)$

avec $u \in Z_2^n$, $V \in Z_2^n$

Définition principale

$$(X\theta_{uV}Y) = uV + (u+1)V(X\theta Y) + u(V+1)(X\theta^* Y)$$

Diagramme commutatif

$$\begin{array}{rcl} \Psi_{uV} \times \Psi_{uV} : (p,q) & \longrightarrow & (\Psi_{uV}(p),\Psi_{uV}(q)) \\ \theta\downarrow & & \downarrow\theta_{uV} \\ \Psi_{uV} : (p\theta q) & \longrightarrow & (\Psi_{uV}(p)\theta_{uV}\Psi_{uV}(q)) \end{array}$$

Théorème :

$$\Psi_{uV}(p\theta q) = (\Psi_{uV}(p)\theta_{uV}\Psi_{uV}(q)).$$

Le nœud trivial c'est ça

$(0,1)$

mais avec de son développement linéaire,

qui commence avec ce qui vient maintenant

2. - Le nœuds triviale

Les 16 connections dans le système d'écriture des connecteurs

$(p\wedge\neg p)$

$(p\wedge q)$ $(p\wedge\neg q)$ $(\neg p\wedge q)$ $(\neg p\wedge\neg q)$

p **q** $(p\not\Leftrightarrow q)$ $(p\Leftrightarrow q)$ $\neg q$ $\neg p$

$(p\vee q)$ $(p\Leftarrow q)$ $(p\Rightarrow q)$ $\neg(p\wedge q)$

$(p\vee\neg p)$

Leur interprétations sémantiques se transcrivent de trois manières équivalantes.

p q	pθq
0 0	a
0 1	b
1 0	c
1 1	d

table de vérité

θ	0	1
0	a	b
1	c	d

table de Pythagore

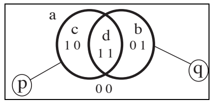

diagramme de Euler-Venn

Les 16 interprétations respectives de ces connections

$\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix}0&0\\1&1\end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix}0&1\\0&1\end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix}1&0\\1&0\end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix}1&1\\0&0\end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix}0&1\\1&1\end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix}1&0\\1&1\end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix}1&1\\0&1\end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix}1&1\\1&0\end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix}1&1\\1&1\end{bmatrix}$

---

3. - Dépliage de l'aspect linéaire du nœud trivial (0,1)

Son Algèbre de Boole

$Z_2 = (\{0, 1\}, +, \times)$ avec $(x^2 = x)$ et $(2x = 0)$

et la transcription $(p\not\Leftrightarrow q) = (p + q)$ et $(p\wedge q) = pq$

+	0	1
0	0	1
1	1	0

table de + et

×	0	1
0	0	0
1	0	1

table de ×,

$\neg p = (p+1)$, $(p\Rightarrow q) = (p(q+1)+1)$ et $(p\not\Leftrightarrow q) = ((q+1)p + q(p+1))$

---

les16 connections dans cette algèbre

0

pq pq+p pq+q pq+p+q+1

p q p+q p+q+1 q+1 p+1

pq+p+q pq+q+1 pq+p+1 pq+1

1

Nous constatons pour un quelconque connecteur θ qu'il peut s'écrire selon l'expression linéaire :

$(p\theta q) = \alpha pq + \beta p + \gamma q + \delta$ avec $(\alpha, \beta, \gamma, \delta) \in \{0,1\}$

d'où l'expression de son dual morganien.

Dualité Morganienne

$$(p\boldsymbol{\theta}^*q) = (((p+1)\boldsymbol{\theta}(q+1)) +1) = [(\alpha(p+1)(q+1)+\beta(p+1)+\gamma(q+1)+\delta) +1]$$
$$= [\alpha pq + (\alpha+\beta)p + (\alpha+\gamma)q + (\alpha+\beta+\gamma+\delta) +1]$$
$$= [(\alpha pq + \beta p + \gamma q +\delta) + (\alpha p + \alpha q + \alpha) + (\beta+\gamma) +1] = [(p\theta q) + \alpha(p\Leftrightarrow q) + (\beta+\gamma) +1]$$

par définition (voir plus haut)

$$(X\boldsymbol{\theta}_{uV}Y) = uV + (u+1)V\mathbf{(X\theta Y)} + u(V+1)\mathbf{[(X\theta Y) + \alpha(X\Leftrightarrow Y) + (\beta+\gamma) +1]}$$
$$= [(u+V)(X\theta Y) + uV + u(V+1)] \mathbf{+ u(V+1)[(\alpha(X\Leftrightarrow Y)+ (\beta+\gamma)]}$$
$$= [(u+V)(X\boldsymbol{\theta} Y) + u] \mathbf{+ u(V+1)[(\alpha(X\Leftrightarrow Y) + (\beta+\gamma)]}$$
$$(X\boldsymbol{\theta}_{uV}Y) = \Psi_{uV}(X\boldsymbol{\theta} Y) \mathbf{+ u(V+1)[\alpha(X\Leftrightarrow Y) + \beta+ \gamma]}$$

pour préparer à la démonstration du théorème qui se fait par le calcul.